n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	…
F_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610	987	1597	2584	4181	6765	…

Tableau 1. Les nombres de Fibonacci.

A la recherche de l'abbé Gelin[1]

Hans J. H. Tuenter

Le précédent numéro du *Bulletin communal de Faimes* comportait un texte sur l'abbé Gelin (1851-1921), né au village de Celles [1]. Ce texte était basé sur des informations données par Jean Dupuis (ancien préfet au Collège St-Quirin de Huy), et a été complété par le rédacteur en chef à partir du livre *Les rues de Faimes* de Joseph Delchambre (1925-2012) [2, p. 41].

L'article donnait quelques détails biographiques sur l'abbé Gelin et indiquait qu'en plus d'être membre du clergé, Emile Gelin était aussi un mathématicien reconnu et très respecté à son époque. Au fil des années, notre abbé a progressivement disparu de nos mémoires et aujourd'hui, ses découvertes sont pratiquement oubliées. La seule exception est un résultat sur les nombres de Fibonacci, résultat qui porte son nom, **« l'identité Gelin-Cesàro ».**

Figure 1. L'abbé Emile Gelin (1851-1921).

Dans le présent article, qui comprendra trois parties (à suivre dans les prochains *Bulletins*), je vais aborder certains aspects des recherches mathématiques de l'abbé Gelin, puis vous expliquer comment un mathématicien néerlandais vivant au Canada s'est intéressé à un abbé belge. Je vous parlerai de l'enquête qui m'a finalement mené à Huy et à Faimes, de ce qui en est ressorti et des nombreuses questions qui restent sans réponse. Pour cela, il faut commencer par un peu de mathématiques et parler des nombres de Fibonacci ainsi que du nombre d'or.

Les nombres de Fibonacci et le nombre d'or

Les nombres de Fibonacci (F_n) sont définis par la relation de récurrence suivante :

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n ,$$

Avec, pour valeurs initiales, $F_0 = 0$ et $F_1 = 1$.

Ceci n'est qu'un langage mathématique et signifie simplement que pour construire la suite des nombres de Fibonacci, il faut commencer par les nombres 0, 1 et déterminer le nombre suivant dans la séquence en faisant la somme des deux termes précédents, et poursuivre de cette manière. Le résultat est : 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, et ainsi de suite. Vous trouverez davantage de nombres de la séquence de Fibonacci dans le Tableau 1. On peut continuer la séquence de Fibonacci indéfiniment.

Les nombres de Fibonacci portent le nom du mathématicien italien du XIII^e siècle Léonard de Pise, également connu sous le nom de Fibonacci, et figurent dans son livre *Liber Abaci*.

Il est à noter que ces chiffres se retrouvent dans les endroits les plus inattendus :

- le nombre de pétales dans les fleurs (généralement un nombre de Fibonacci) ;
- le nombre de spirales (dans le sens des aiguilles d'une montre et dans le sens inverse des aiguilles d'une montre) dans la disposition des graines dans la tête d'un tournesol (souvent deux nombres de Fibonacci consécutifs) ;
- certains des oxydes d'uranium les plus exotiques sont U_2O_5, U_3O_8, U_5O_{13}, U_8O_{21} et $U_{13}O_{34}$. Repérez les nombres de Fibonacci !
- des traders en finance utilisent souvent le ratio de deux nombres de Fibonacci afin de prédire quand une tendance du marché pourrait s'inverser.

Donnons une autre propriété importante : plus les nombres de Fibonacci sont grands, plus le rapport entre chaque paire de nombres se rapproche du nombre d'or, φ. La formule mathématique de ce fameux nombre est donnée par :

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618\,033\,988\,749\ldots .$$

Si vous effectuez avec votre calculette l'opération 6765/4181 (le rapport des deux derniers nombres dans le tableau en haut de page), voyez quel nombre vous obtenez : il est très proche du nombre d'or ! Vous voyez l'idée, les nombres de Fibonacci et le nombre d'or sont intimement liés !

Le nombre d'or, appelé aussi proportion divine, est considéré comme régissant l'esthétique et les proportions optimales. On le retrouve dans les dimensions des pyramides d'Egypte et du Parthénon à Athènes.

[1]Traduction de l'original anglais [3] par Nathalie Jacob avec les conseils de l'auteur.

Aujourd'hui, il y a même une importante école d'architecture qui utilise le nombre d'or comme base pour ses créations. Le nombre d'or joue également un rôle en chirurgie plastique et en dentisterie.[2]

Pour ceux qui souhaitent en savoir plus, il existe de nombreux livres de vulgarisation scientifique qui parlent en détail des nombres de Fibonacci et du nombre d'or : notamment les livres de Hemenway et de Hart-Davis, tous deux riches en illustrations et faciles d'accès au niveau des mathématiques [4, 5]. Sachez qu'ils peuvent être empruntés auprès de la bibliothèque locale située à Viemme.

Cela fait plusieurs siècles que les mathématiciens ont étudié la suite de Fibonacci, ses propriétés et celles des suites apparentées. Un journal mathématique, *The Fibonacci Quarterly*, est par ailleurs consacré exclusivement aux nombres de Fibonacci et à des rubriques qui y sont étroitement liées. Au fil du temps, de nombreuses propriétés de ces nombres ont été découvertes. Il est donc assez remarquable qu'un inconnu, un abbé belge, ait trouvé une nouvelle et saisissante propriété au sujet des nombres de Fibonacci.

> **570.** Dans la *série de Lamé* :
>
> 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ... :
>
> 1° Si l'on prend quatre termes consécutifs, la différence entre le produit des termes moyens et celui des termes extrêmes, égale ± 1 ;
>
> 2° Si l'on prend cinq termes consécutifs, la différence entre la quatrième puissance du terme du milieu et le produit des quatre autres termes, égale 1. (Gelin.)

Figure 2. Problème 570 (Août, 1880).

L'abbé Gelin et ses découvertes

L'abbé Gelin était un collaborateur régulier de la revue pédagogique belge *Nouvelle Correspondance Mathématique* (NCM), dans laquelle il a proposé et résolu des problèmes mathématiques. Il a aussi publié plusieurs articles dans cette revue. Le rédacteur en chef du NCM était Eugène Catalan (1814-1894), un mathématicien renommé et professeur à l'Université de Liège. Dans le numéro d'août 1880 de cette revue, Emile Gelin a énoncé deux propriétés de la séquence de Fibonacci [6]. Elles ont été regroupées sous le « Problème 570 », les lecteurs de la revue étant invités à faire part de leur avis, voir Figure 2.

[2] L'année dernière, lors d'un examen dentaire de routine, j'ai mentionné mes recherches sur l'histoire des nombres de Fibonacci et du nombre d'or à mon dentiste. J'ai écrit des nombres de Fibonacci et le nombre 1,618 comme approximation pratique du nombre d'or. Il était très intéressé et s'est précipité vers sa bibliothèque. Je suis reparti avec trois livres colorés sur la dentisterie esthétique, les soins dentaires, l'esthétique et le sourire parfait ; tout est basé sur la magie du nombre 1,618. Cela m'a définitivement fait sourire !

C'est la deuxième propriété qui nous intéresse ici.[3]

La **propriété découverte par Emile Gelin** est que, lorsque nous prenons cinq nombres de Fibonacci consécutifs, la puissance quatrième du nombre du milieu moins le produit des quatre autres nombres vaut toujours un.

- Comme premier exemple, prenons les nombres 1, 2, 3, 5, 8. La puissance quatrième du nombre du milieu est $3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$. Le produit des quatre autres nombres est $1 \times 2 \times 5 \times 8 = 80$. La différence est exactement égale à un !
- Comme deuxième exemple, prenons les nombres 2, 3, 5, 8, 13. Le même calcul donne :
  $$5^4 - 2 \times 3 \times 8 \times 13 = 625 - 624 = 1.$$
  Encore une fois, la différence est un. N'est-ce pas incroyable ! Cette propriété est valable, quelle que soit la grandeur des nombres de Fibonacci (et ils grossissent assez rapidement).
- Comme troisième et dernier exemple, prenons les cinq derniers nombres de Fibonacci dans le tableau du début de l'article. Le même calcul donne :
  $$2584^4 - 987 \times 1597 \times 4181 \times 6765 = 1.$$

Vous voudrez peut-être faire le calcul vous-même et vérifier si l'abbé Gelin avait raison. Quand vous le ferez, rappelez-vous qu'il ne disposait pas de calculatrice électronique et qu'il a effectué tous ses calculs à la main. Il est possible que vous pensiez que tout cela n'est qu'une belle supercherie avec des chiffres. Cependant, les mathématiciens sont très enthousiasmés par ces résultats et plus spécialement quand ils découvrent des structures complexes dans une suite obtenue via un processus simple consistant à ajouter à plusieurs reprises deux nombres comme c'est le cas pour la suite de Fibonacci. Vous l'avez sans doute déjà remarqué, les mathématiciens sont un peu à part. Ils pensent dans une langue différente, avec des symboles et des formules, et non pas des mots et des chiffres. Pour un mathématicien, la propriété découverte par Emile Gelin est traduite par la formule suivante :

$$F_n^4 - F_{n-2}\,F_{n-1}\,F_{n+1}\,F_{n+2} = 1$$

Cette formule est maintenant connue sous le nom de **« l'identité Gelin-Cesàro »**. Cela peut paraître compliqué, mais ce n'est en fait pas si difficile à expliquer. Pour n = 4, l'identité donne $F_4^4 - F_2 F_3 F_5 F_6 = 1$.

[3] Avant que la communauté mathématique n'attribue de manière standard le nom de « Fibonacci » à cette suite particulière, elle était connue sous plusieurs noms. L'un d'eux était « Lamé », d'après le mathématicien français Gabriel Lamé (1795-1870), qui étudia la suite dans le contexte de l'algorithme d'Euclide.

En substituant les nombres de Fibonacci correspondants dans le Tableau 1, nous obtenons le premier exemple numérique que nous avons utilisé. Pour n = 18, l'identité donne $F_{18}^4 - F_{16}F_{17}F_{19}F_{20} = 1$.

C'est le dernier exemple de calcul que nous avons fait.

D'où vient le nom de « l'identité Gelin-Cesàro » ?

Une solution au « Problème 570 » a été donnée un mois plus tard dans le numéro de septembre 1880 du NCM par le mathématicien italien Ernesto Cesàro (1859-1906). Malheureusement, la revue a cessé de paraître en raison de difficultés financières (le dernier numéro du NCM est paru en décembre 1880).[4]

La revue n'existant plus, il n'est pas surprenant que l'identité de Gelin n'ait pas attiré davantage l'attention. L'identité avec les noms de Gelin et Cesàro a été brièvement mentionnée dans une revue de littérature mathématique en 1919 par un mathématicien et historien américain et a fini par tomber dans l'oubli. Elle est également apparue dans deux articles d'un autre mathématicien américain au milieu des années 1960, mais l'identité était si profondément enfouie parmi un grand nombre d'autres identités mathématiques que peu (voire personne) ne l'ont remarquée. Dans les années 1980, soit plus d'un siècle après qu'il a posé son « Problème 570 », l'abbé Gelin a été redécouvert par un mathématicien portugais. L'identité a ensuite été utilisée par deux mathématiciens australiens. Elle a dès lors rapidement gagné en popularité, est devenue connue sous le nom « l'identité Gelin-Cesàro » et est aujourd'hui fréquemment citée.

En 1880, Ernesto Cesàro est encore un jeune étudiant à Liège et est un protégé du mathématicien Eugène Catalan. Ernesto Cesàro finit par retourner dans son pays natal, l'Italie, et devient un professeur de mathématiques reconnu et hautement respecté. Par conséquent, nous avons beaucoup d'informations sur ses travaux et sa vie.

En ce qui concerne Emile Gelin, c'est le néant. Aujourd'hui, on ne sait absolument rien de lui dans le monde des mathématiques, si ce n'est qu'il était abbé et qu'il a enseigné les mathématiques au Collège St-Quirin à Huy, et c'est ce qui a éveillé mon intérêt. A l'époque, je venais de terminer l'essentiel des recherches pour un projet similaire sur un mathématicien russe [7]. Il m'a alors semblé que c'était une bonne idée d'entamer des recherches sur l'abbé belge Gelin et de le faire sortir de l'ombre pour le mettre sous les feux de la rampe.

[4] Le fait que le ministère français de l'Instruction publique ait souscrit 92 abonnements mais qu'il n'ait pas été en mesure de les payer n'a pas aidé. Le gouvernement belge a payé rapidement ses 100 abonnements.

De précieuses trouvailles au Collège St-Quirin

Au bon vieux temps, on cherchait des informations à la bibliothèque de l'université et en fouillant dans les archives. Pendant mes études à Birmingham, en Angleterre, j'ai passé beaucoup de temps dans les archives de l'université et parcouru de vieux livres et les volumes poussiéreux des revues d'antan. Une telle journée était bien sûr suivie d'une visite au pub et d'une pinte de Guinness pour se débarrasser de la poussière accumulée. Aujourd'hui, je me sers une grande tasse de café, je me détends dans un confortable fauteuil et j'allume l'internet. Assez rapidement, on découvre alors qu'une rue de Faimes porte le nom « Abbé Gelin » et que celui-ci a enseigné les mathématiques au Collège St-Quirin à Huy. Ensuite, les choses deviennent de plus en plus difficiles. Tout n'est pas (encore) sur l'internet.

C'est avec l'aide de Michel Bataille, professeur de mathématiques retraité de Rouen et lui aussi grand amateur des nombres de Fibonacci, que j'ai pu contacter l'actuel directeur du Collège St-Quirin et, par la suite, Jean Dupuis, ancien préfet du collège. De mon côté, j'avais déjà découvert que l'abbé Gelin connaissait Paul Mansion (1844-1919), professeur renommé de l'Université de Gand, né à Marchin et scolarisé à Huy, et qu'il correspondait avec lui. J'avais également demandé à Hervé Le Ferrand, un professeur à l'Institut de Mathématiques de Bourgogne qui a beaucoup écrit sur Paul Mansion, de faire des recherches à la société historique de Huy, et cette enquête a abouti à Jean Dupuis.

Ainsi commencent de nombreux échanges de courriels entre Toronto et Huy. Jean Dupuis a été le préfet de l'internat du Collège St-Quirin pendant plus de dix ans. Il a commencé au milieu des années 70 où le Collège était encore une école catholique traditionnelle pour garçons, dirigée par un abbé et des prêtres résidents qui donnaient les cours avec l'aide de quelques enseignants laïcs. A cette époque, Jean résidait au Collège, avait le privilège de manger dans le réfectoire des abbés et côtoyait de nombreux prêtres. Au cours de sa longue et intéressante carrière à St-Quirin, on lui a confié de nombreuses responsabilités. L'une d'elles était de diriger le cinéma du Collège St-Quirin, la « *Salle Vigilanti* ». Ce cinéma a été fondé en 1927, à l'époque où les films étaient muets et où un pianiste assurait l'atmosphère dramatique et le suspense. Quand le pianiste était absent, le directeur ou l'abbé Claes le remplaçait [8. p. 119]. Les lumières de *Vigilanti* se sont éteintes définitivement au début des années 80 et ont mis fin à une époque.

Jean a servi le collège pendant trente-cinq ans. Actuellement à la retraite, il reste attaché à ces « vieux murs » et continue de s'occuper des archives et du patrimoine de l'établissement.

Aujourd'hui, le Collège St-Quirin est une institution mixte. Il n'y a plus de prêtres, bien qu'il existe toujours des liens étroits avec l'évêché de Liège.

Ma rencontre avec Jean a été une bénédiction inattendue et s'est avérée être la clé pour ouvrir les portes qui ont mené à l'abbé Gelin. Il m'a raconté des anecdotes sur ses débuts au collège et m'a dépeint l'atmosphère de l'époque qui n'était sans doute pas très éloignée de celle pendant laquelle Emile Gelin enseignait dans cet établissement.

Au cours de mes recherches précédentes, je suis tombé sur un livre publié en 1980 à l'occasion du 125e anniversaire du Collège St-Quirin. L'abbé Paul Claes (1904-1991) en a été le directeur de la publication [8]. Cela a dû être un véritable travail d'amour (et de sacrifice), l'abbé Claes ayant pris sa retraite avec le statut de professeur émérite en 1976, après près de cinquante ans de service au collège. Le livre a été publié à titre privé et financé par souscription, principalement d'anciens élèves et des membres du personnel du collège. Ceci étant, comme Jean me l'a dit, il semble que l'abbé Claes ait dû investir une bonne partie de son propre argent dans l'aventure pour la mener à bien.

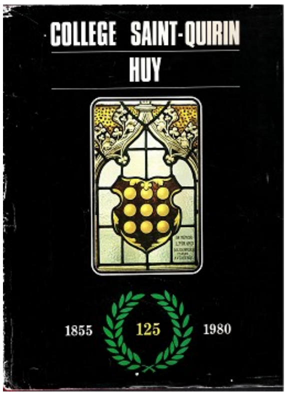

Figure 3. Couverture du livre de l'abbé Claes.

Seuls 500 exemplaires de ce livre à couverture rigide de trois cents pages, numérotées individuellement et magnifiquement illustrées, ont été imprimés. La plupart des ouvrages se trouvent dans des collections privées, bien que j'aie déniché quelques bibliothèques publiques en Hesbaye qui en possèdent un exemplaire. Il s'agit donc d'un livre relativement rare et difficile à se procurer, en particulier pour quelqu'un qui se trouve de l'autre côté de l'océan Atlantique. Par chance, Jean Dupuis était l'abonné 267, et c'est l'abbé Claes qui lui a remis personnellement son exemplaire. Comme indiqué par Jean, le livre de l'abbé Claes contient des descriptions de certains des anciens prêtres du Collège, dont deux pages concernant l'abbé Gelin, avec une photo !

Quelques jours plus tard, ma boîte de réception s'est mise à clignoter et une copie de ces pages est arrivée. Après des mois de recherches infructueuses, je me souviens à quel point j'étais enthousiaste à l'idée d'avoir enfin un aperçu d'Emile Gelin et de lire sa biographie. La photographie de l'abbé Gelin au début de cet article est tirée du livre de l'abbé Claes.

Les choses se sont ensuite accélérées, car nous avions des informations à travailler, à vérifier et à valider. Grâce au livre de l'abbé Claes, nous savons maintenant qu'Emile Gelin est né à Celles (Faimes) le 18 avril 1851, qu'il a obtenu un doctorat en théologie et en philosophie et qu'il a été professeur de mathématiques au Collège St-Quirin à Huy de 1875 à 1905. À sa retraite, il a reçu le statut d'émérite. Il a habité dans les locaux du Collège jusqu'à sa mort le 23 avril 1921, soit quelques jours après son 70e anniversaire.

L'histoire de l'abbé Gelin est bien plus longue encore. Cependant, son histoire, le récit de ma visite à Huy et à Faimes et de ce que nous avons découvert devront attendre les deux prochains numéros du *Bulletin*.

Et vous, que diriez-vous ?

Avant de conclure, permettez-moi de vous poser le problème suivant :

> Dans la série de Fibonacci :
>
> 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, . . .
>
> Si l'on prend trois termes consécutifs . . .

Si vous étiez l'abbé Gelin, comment finiriez-vous cette phrase ?

Vous trouverez la réponse dans le prochain *Bulletin*.

Références

[1] Jean Dupuis. L'abbé Gelin, un mathématicien à redécouvrir. *Bulletin communal de Faimes*, automne 2023. Augmenté de matériel provenant de Delchambre [2].

[2] Joseph Delchambre. *Les rues de Faimes*. Imprimerie Hibou (SPRL), Donceel, Belgique, 3e édition, octobre 2019.

[3] Hans J. H. Tuenter. In search of Abbot Gelin. *Working document*, 2023.

[4] Priya Hemenway. *Le Code Secret. La Formule Mystérieuse qui régit les Arts, la Nature et les Sciences*. Evergreen, 2008.

[5] Adam Hart-Davis. *Les Lapins de Fibonacci. 50 Expériences qui ont révolutionné les Mathématiques*. Larousse, Paris, 2020.

[6] Emile Gelin. Question 570. *Nouvelle Correspondance Mathématique*, 6(7) : 384, août 1880. Solution par Ernesto Cesàro, ibid., 6(8) : 423-424, septembre 1880.

[7] Hans J. H. Tuenter. In Search of Comrade Agronomof: Some Tribonacci History. *American Mathematical Monthly*, 130(8): 708–719, October 2023. doi.org/10.1080/00029890.2023.2231796

[8] Abbé Paul Claes, éditeur. *Collège St-Quirin, Huy. 1855-1980*. Editions André Larivière, Huy, septembre 1980.